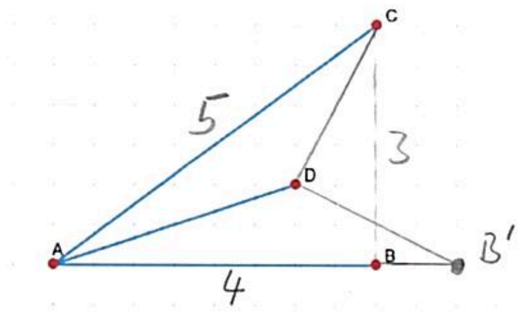
# Klassenstufe 9-10 – Lösungen

## Aufgabe 1

Aus der Abbildung kann abgelesen werden: $|AB| = 4$. Mit dem Satz des Pythagoras gilt $|AC| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Verlängere die Strecke $AB$ zu $AB'$, so dass $|AB'| = 5$.




Es gilt $|DB'| = |DC|$ (Pythagoras). Also sind die beiden Dreiecke $\Delta ADB'$ und $\Delta CAD$ kongruent.

## Aufgabe 2

$B$ gewinnt!
Strategie von $B$: Nimmt $A$ $a$ Münzen, dann nimmt $B$ nimmt daraufhin $5 - a$ Münzen. Das heißt, in jeder Runde werden 5 Münzen weggenommen und in der dritten Runde kann $B$ die letzte Münze nehmen.

## Aufgabe 3

Insgesamt müssen 6 Gleichungen erfüllt sein:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\bullet\ \circ & \times & \otimes\ \wedge & = & \vee\ \wedge\ \circ & \text{(I)} \\
\otimes\ \Delta & \times & \wedge\ \square & = & \bullet\ \Delta\ \square & \text{(II)} \\
\Delta\ \nabla & \times & \blacksquare & = & \square\ \nabla\ \nabla & \text{(III)} \\
\bullet\ \circ & + & \otimes\ \Delta & = & \Delta\ \nabla & \text{(IV)} \\
\otimes\ \wedge & - & \wedge\ \square & = & \blacksquare & \text{(V)} \\
\vee\ \wedge\ \circ & - & \bullet\ \Delta\ \square & = & \square\ \nabla\ \nabla & \text{(VI)}
\end{array}
$$

Aus Gleichung (III) folgen für $\nabla$ und $\blacksquare$ die möglichen Kombinationen:

$$
\begin{aligned}
2 \times 7 &= 12 \\
4 \times 6 &= 24 \\
5 \times 3 &= 15 \\
5 \times 7 &= 35 \\
2 \times 9 &= 45 \\
8 \times 6 &= 48
\end{aligned}
$$

Aus (IV) folgt: $\Delta > \bullet,\ \Delta > \otimes$
Aus (V) folgt: $\otimes > \wedge$
Aus (VI) folgt: $\vee > \bullet,\ \vee > \square$
Aus (I) und (II) folgt: $\otimes = 1$ oder $\otimes = 2$

Die Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen funktioniert nur mit

$$1* \times k*, \quad k = 2, ..., 8, \quad * \text{ beliebig}$$

oder

$$2* \times l*, \quad l = 1, 3, 4, \quad * \text{ beliebig}$$

sodass das Ergbenis dreistellig bleibt. Mit $\otimes > \wedge$ folgt: $\otimes = 2,\ \wedge = 1$.
Damit erhalten wir:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\bullet\ \circ & \times & 2\ 1 & = & \vee\ 1\ \circ & \text{(I)} \\
2\ \Delta & \times & 1\ \square & = & \bullet\ \Delta\ \square & \text{(II)} \\
\Delta\ \nabla & \times & \blacksquare & = & \square\ \nabla\ \nabla & \text{(III)} \\
\bullet\ \circ & + & 2\ \Delta & = & \Delta\ \nabla & \text{(IV)} \\
2\ 1 & - & 1\ \square & = & \blacksquare & \text{(V)} \\
\vee\ 1\ \circ & - & \bullet\ \Delta\ \square & = & \square\ \nabla\ \nabla & \text{(VI)}
\end{array}
$$

Mit (V)

$$\square + \blacksquare = 11$$

ergeben sich die möglichen Kombinationen $3+8$, $4+7$, $5+6$ (oder umgekehrt). Mit (III) folgt:

$$\blacksquare \neq 4,$$
$$\blacksquare \neq 5,$$
$$\blacksquare \neq 8.$$

Da $\bullet \geq 3$ folgt aus Gleichung (VI), dass $\square \neq 8$. Daraufhin erhalten wir mit $\square < \blacksquare$ die Möglichkeiten:

$$\square = 4 \quad \text{oder} \quad \square = 5$$

und

$$\blacksquare = 7 \quad \text{oder} \quad \blacksquare = 6.$$

Aus (I) folgt: $\bullet = 3$ oder $\bullet = 4 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 6,7$
($\Delta \neq 5$, denn anngenommen $\Delta = 5 \quad \Rightarrow \quad \bullet = 3$. Mit $\circ + \Delta < 10$ (aus (IV)) folgt $\circ = 3$ oder $\circ = 4 \quad \Rightarrow \quad \nabla \neq 4 \quad \Rightarrow \quad \nabla = 8 \quad \Rightarrow \quad \circ + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad \circ = 3$. Das ist ein Widerspruch zu $\bullet = 3$)

Kombination der Ergebnisse aus (V) und (I):
Annahme: $\square = 5 \quad \Rightarrow \quad \blacksquare = 6 \quad \overset{(II)}{\Rightarrow} \quad \Delta = 7 \quad \Rightarrow \quad \bullet = 4 \overset{(III)}{\Rightarrow} \quad \nabla = 8$
Dies führt aber zu einem Widerspruch; denn: Nach (IV) muss $\circ + \Delta > 10$ gelten.
$\Rightarrow \quad \circ + 7 = *8 \quad \Rightarrow \quad \circ$ müsste mindestens 11 sein.

Insgesasmt folgt: $\square = 4 \quad \Rightarrow \quad \blacksquare = 7 \quad \overset{(II)}{\Rightarrow} \quad \bullet = 3 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 6$
Mit $\otimes = 2$ erhalten wir: $\nabla = 5$
Schließlich folgt:

$$\begin{array}{cccccc}
3\,\circ & \times & 2\,1 & = & \vee\,1\,\circ & \text{(I)} \\
2\,6 & \times & 1\,4 & = & 3\,6\,4 & \text{(II)} \\
6\,5 & \times & 7 & = & 4\,5\,5 & \text{(III)} \\
3\,\circ & + & 2\,6 & = & 6\,5 & \text{(IV)} \\
2\,1 & - & 1\,4 & = & 7 & \text{(V)} \\
\vee\,1\,\circ & - & 3\,6\,4 & = & 4\,5\,5 & \text{(VI)}
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad \circ = 9$ und $\vee = 8$.

Zusammengefasst gilt:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | $\wedge$ | $\otimes$ | $\bullet$ | $\square$ | $\nabla$ | $\Delta$ | $\blacksquare$ | $\vee$ | $\circ$ |

## Aufgabe 4

a) Lösung: 3. Es geht mit drei Polizisten. Zwei Polizisten reichen nicht aus, da sie maximal $5 + 4 = 9$ von 10 Kreisen abdecken können.

b) Lösung: 4. Es geht mit 4 Polizisten. Es geht nicht mit 3 Polizisten. Denn diese drei Polizisten müssten in einer Reihe nebeneinander postiert werden.

c) Lösung: 5. Es geht mit 5 Polizisten. Es geht nicht mit 4 Polizisten. Denn diese 4 Polizisten müssten in einer Reihe angeordnet werden. Dies klappt nicht: Sind die Polizisten an nebeneinander liegenden Kreisen in der Reihenfolge $a$, $b$, $c$ und $d$ aufgestellt, und sehen diese Kreise jeweils $g_a$, $g_b$, $g_c$, $g_d$ andere Kreise, so müsste gelten

$$g_a + (g_b - 1) + (g_c - 1) + g_d \geq 10.$$

Dies wäre nur möglich, wenn die Vierer-Kette an dem Kreis beginnt, der vier Kreise sieht, und beide Kreise enthält, die jeweils drei Kreise sieht. Dies ist aber mit 4 Polizisten nicht möglich.

## Aufgabe 5

Der Bäcker nimmt $x_1$ von Mischung 1.
Der Bäcker nimmt $x_2$ von Mischung 2.
Der Bäcker nimmt $x_3$ von Mischung 3.
Der Bäcker nimmt $x_4$ von Mischung 4.

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
(I) & 0,9x_1 & + & 0,7x_2 & + & 0,6x_3 & + & 0,4x_4 & = & 0,6 \\
(II) & & & 0,1x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,2x_4 & = & 0,11 \\
(III) & 0,1x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,4x_4 & = & 0,29
\end{array}$$

$-(I) + 9 \cdot (III)$:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
(I)' & & & 1,1x_2 & + & 1,2x_3 & + & 3,2x_4 & = & 2,01 \\
(II) & & & 0,1x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,2x_4 & = & 0,11 \\
(III) & 0,1x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,4x_4 & = & 0,29
\end{array}$$

$-(I) + 11 \cdot (II)$:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
(I)'' & & & & & 1,0x_3 & - & 1,0x_4 & = & -0,8 \\
(II) & & & 0,1x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,2x_4 & = & 0,11 \\
(III) & 0,1x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,4x_4 & = & 0,29
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = -0,8 + x_4$

Eingesetzt in $(II)$:

$$\begin{array}{lll}
& 0,1x_2 + 0,2(-0,8 + x_4) + 0,2x_4 & = 0,11 \\
\Rightarrow & 0,1x_2 & = 0,11 + 0,16 - 0,4x_4 \\
\Rightarrow & x_2 & = 2,7 - 4x_4
\end{array}$$

Zusätzlich zum Gleichungssystem müssen die folgenden Nebenbedingungen erfüllt sein:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Um die Nebenbedingungen zu erfüllen, folgt,

$$\begin{array}{llllll} 0 & \leq x_3 & = -0,8 + x_4 & \Rightarrow & x_4 & \geq 0,8 \\ 0 & \leq x_2 & = 2,7 - 4x_4 & \Rightarrow & x_4 & \leq \frac{2,7}{4} = 0,675 \end{array}$$

Die Bedingungen $x_4 \geq 0,8$ und $x_4 \leq 0,675$ stellen einen Widerspruch dar.

$\Rightarrow$ Eine Herstellung des Bayreuther Winterbrotes ist nicht möglich!