

Klassenstufe 11–12

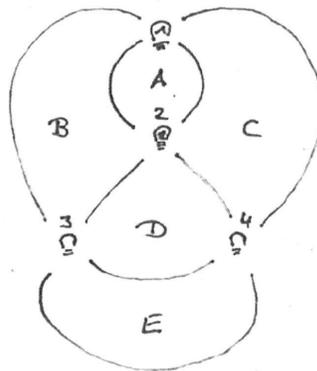
Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

*Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.*

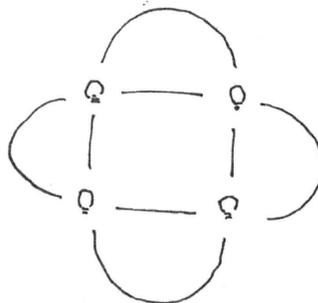
Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Bei dem folgenden Spiel sind Lampen an den Positionen 1, 2, 3, 4. Durch Betätigen der Schalter A, B, C, D, E werden jeweils die benachbarten Lampen umgeschaltet.



- Finde für jede Lampe i ($1 \leq i \leq 3$) Schalter, so dass ausgehend von dunklen Lampen nach Betätigen dieser Schalter nur Lampe i leuchtet. Z.B. $4 = A, C$.
- Zeige, dass im unteren Bild – ausgehend von dunklen Lampen – keine einzelne Lampe zum Leuchten gebracht werden kann.



Aufgabe 2:

(6 Punkte)

Wie oft stehen der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 24 Stunden senkrecht zueinander, und wann geschieht dies nach Mitternacht zum ersten Mal?

Aufgabe 3:**(6 Punkte)**

Gegeben seien 12 gleich aussehende (durchnummerierte) Kugeln. Man weiss, dass genau eine davon minimal leichter oder schwerer als die anderen ist.

Man zeige, dass es mit einer Balkenwaage möglich ist, mit drei Wägungen diese Kugel herauszufinden und zudem festzustellen, ob sie schwerer oder leichter als die anderen ist.

Aufgabe 4:**(6 Punkte)**

- a) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
 b) Zeige, dass es zu einer vorgegebenen Zahl n eine Zahl m gibt, so dass die Zahlen

$$m + 1, \dots, m + n$$

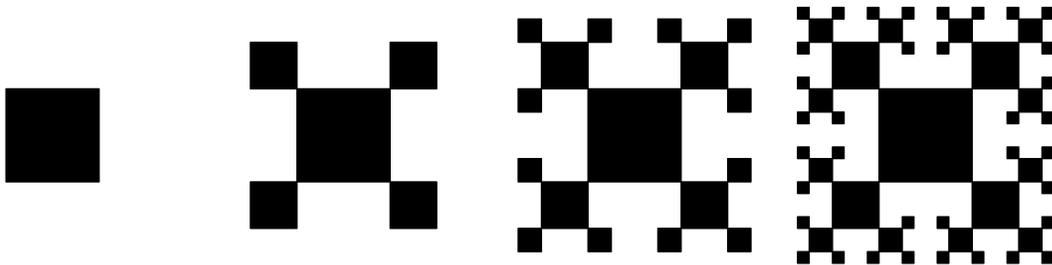
keine Primzahlen sind.

Aufgabe 5:**(8 Punkte)**

Es seien 2 Nägel in der Wand an den Stellen A und B eingeschlagen. Wie kann man an einer Schnur, die um die beiden Nägel gewickelt ist und deren Enden miteinander verknotet sind, ein Bild aufhängen, so dass, nachdem man einen der beiden Nägel entfernt hat, das Bild zu Boden fällt?

Aufgabe 6:**(8 Punkte)**

Betrachte folgende Konstruktion: Starte mit einem Quadrat mit Seitenlänge 1. Eine Ecke eines Quadrats, welches keine Ecke eines anderen Quadrats berührt, heißt *frei*. In jedem weiteren Konstruktionsschritt wird an die freien Ecken diagonal ein weiteres Quadrat der halben Seitenlänge angefügt. Die entstehenden Muster der ersten vier Konstruktionsschritte sehen wie folgt aus:



- (a) Welchen Flächeninhalt besitzt das n -te Muster?
 (b) Welches Verhalten zeigt die Folge der Flächeninhalte für $n \rightarrow \infty$?
 (c) Welchen Umfang besitzt das n -te Muster?
 (d) Welches Verhalten zeigt die Folge der Umfänge für $n \rightarrow \infty$?
 (e) Welche Seitenlänge besitzt das kleinste Quadrat, welches das n -te Muster einschließt? Wie lautet der Grenzwert?
 (f) Aus wie vielen Quadraten besteht das n -te Muster?

Folgende Formel für $x > 0$, $x \neq 1$ könnte nützlich sein:

$$\sum_{i=0}^n x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!