

Klassenstufe 5–6

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

*Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.*

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**

Frau Gütlich bereitet Obstschalen für eine festliche Tafel vor. Jede Schale soll gleich viele Früchte enthalten.

Gibt sie in jede Schale 12 Früchte, dann bleibt eine Schale leer. Gibt sie in jede Schale 10 Früchte, dann bleiben 6 Früchte übrig. Wie viele Schalen hat Frau Gütlich mit Obst gefüllt?

Lösung:

Die Anzahl der Früchte muss einerseits durch 12 teilbar sein. Andererseits muss diese Anzahl bei der Division durch 10 den Rest 6 lassen. Wir untersuchen deshalb die Zwölfervielfachen.

Ein Beispiel: Angenommen es wären $6 \cdot 12 = 72$ Früchte zu verteilen. Dann lässt aber $72 : 10$ den Rest 2. Also ist 72 keine Lösung, weil ja 6 als Rest bleiben soll.

Wir landen schließlich bei 96 Früchten, denn $96 : 10 = 9$ Rest 6. Also hat Frau Gütlich 9 Schalen gleichmäßig mit Obst gefüllt.

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**

Drei Busse verkehren auf einem Rundkurs, so dass die Wartezeit zwischen zwei Bussen jeweils 24 Minuten beträgt. Wie viele Busse müssen unterwegs sein, wenn die Wartezeit geviertelt werden soll? (Tipp: Eine Skizze könnte nützlich sein.)

Lösung:

Eine Verringerung der Wartezeit auf $\frac{1}{4}$ bedeutet einen Abstand bzw. eine Wartezeit von 6 Minuten. Somit werden für die Gesamtfahrstrecke mit einer Durchfahrtdauer von $3 \cdot 24 = 72$ Minuten insgesamt $72/6 = 12$ Busse benötigt.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Begründe für die Zahl $P = 9 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 39 \cdot 49 \cdot 59 \cdot 69$:

- a) P ist zwar durch 13 aber nicht durch 17 teilbar.
- b) P endet mit der Ziffer 9.
- c) Der Wert der Summe $S = 111\,111\,111 + P$ ist durch 45 teilbar.

Lösung:

- a) Weil 39 durch 13 teilbar ist, muss auch P durch 13 teilbar sein, und weil die Zahl 17 keinen der 7 Faktoren der Zahl P ohne Rest teilt, kann 17 kein Teiler von P sein.

- b) Die Endziffer von $9 \cdot 9$ ist 1.
 Die Endziffer von $9 \cdot 9 \cdot 9$ ist 9.
 Die Endziffer von $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ ist wieder 1.
 Insgesamt sind in P sieben Neuner miteinander zu multiplizieren. Damit endet der Wert von P mit der Ziffer 9.
- c) Der Summand 111 111 111 besitzt die Quersumme 9. Also ist auch 111 111 111 durch 9 teilbar.
 Das Produkt P enthält den Faktor 9. Also ist der Produktwert von P auch durch 9 teilbar.
 Weil 111 111 111 und gleichzeitig P durch 9 teilbar sind, ist auch S durch 9 teilbar.
 Die Endziffer von S ergibt sich aus $1 + 9 = 10$. Also endet S mit der Ziffer 0.
 Damit ist S durch 10, also auch durch 5 teilbar.
 Insgesamt ist damit S durch $9 \cdot 5 = 45$ teilbar.

Aufgabe 4:

(6 Punkte)

Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum sieben Vögel auf den zweiten Baum geflogen waren und vom zweiten Baum fünf Vögel auf den dritten, saßen auf dem zweiten Baum doppelt so viele Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten Baum doppelt so viele Vögel wie auf dem zweiten.

Berechne, wie viele Vögel ursprünglich auf jedem der drei Bäume saßen.

Lösung:

Auf dem ersten Baum saßen ursprünglich 15, auf dem zweiten 14 und auf dem dritten 27 Vögel, so dass die Verteilung am Ende 8, 16, 32 betragen hat.

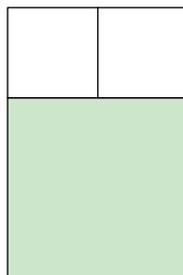
Mit etwas mehr mathematisch-algorithmischem Vorwissen kann man die Aufgabe auch routinemäßig ohne allzuviel Nachdenken mit Hilfe eines sogenannten *linearen Gleichungssystems* lösen. Die zugehörigen Gleichungen lauten $a + b + c = 56$, $b + 2 = 2(a - 7)$ und $c + 5 = 2(b + 2)$.

Aufgabe 5:

(4 Punkte)

Die Klasse 5a soll das abgebildete Muster untersuchen. Es ist aus zwei gleichen Quadraten und einem Rechteck zusammengesetzt. Dieses Rechteck besitzt den doppelten Umfang wie eines der beiden Quadrate.

Berechne den Flächeninhalt der gesamten Figur, wenn jedes der beiden Quadrate einen Umfang von 12 cm besitzen würde.



Lösung:

Wenn das Rechteck den doppelten Umfang wie eines der beiden Quadrate besitzt, dann beträgt sein Umfang $2 \cdot 12 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

Die Länge der Seite eines Quadrates beträgt $12 \text{ cm} : 4 = 3 \text{ cm}$. Sein Flächeninhalt beträgt daher $3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$.

Die Länge des Rechtecks beträgt $2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

Dann beträgt seine Höhe $(24 \text{ cm} - 2 \cdot 6 \text{ cm}) : 2 = 6 \text{ cm}$. (Das Rechteck ist sogar ein Quadrat.)

Sein Flächeninhalt beträgt daher $6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2$.

Der Flächeninhalt der gesamten Figur beträgt dann $2 \cdot 9 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 6:

(6 Punkte)

Ein 2023×2023 Kästchenpapier ist mit den Farben 1, 2, 3 und 4 ausgemalt (siehe Abbildung).

Welche Farbe wurde am häufigsten benutzt?

1	2	3	4	1	2	3	4	1	...
2	3	4	1	2	3	4	1	2	...
3	4	1	2	3	4	1	2	3	...
4	1	2	3	4	1	2	3	4	...
1	2	3	4	1	2	3	4	1	...
2	3	4	1	2	3	4	1	2	...
3	4	1	2	3	4	1	2	3	...
4	1	2	3	4	1	2	3	4	...
1	2	3	4	1	2	3	4	1	...
...

Lösung:

In jeder Zeile wiederholen sich die Zahlen (Farben) alle vier Einträge. In den ersten $4 \cdot 504 = 2020$ Spalten kommen alle vier Zahlen gleich häufig vor. In den letzten drei Spalten fehlt jeweils eine der vier Zahlen. In der ersten Zeile kommt 4 in den letzten drei Spalten nicht vor, in der letzten Zeile kommt 2 in den letzten drei Spalten nicht vor.

Damit kommt die Farbe 3 genau einmal mehr vor wie die Farben 1, 2 und 4.