Klassenstufe 7–8

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**
An einem Turnier nehmen 4 Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielt jeweils gegen alle anderen. Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt und für eine Niederlage 0 Punkte.

Die Endtabelle sieht wie folgt aus:

	Spiele	Punkte	Tordifferenz
Team A	3	9	4:1
Team B	3	4	3:2
Team C	3	4	1:1
Team D	3	0	0:4

Wie lauten die Ergebnisse der jeweiligen Spielpaarungen?

Lösung:
Man sieht sofort:

	Spiele	Punkte	Siege	Unentschieden	Niederlagen	Tordifferenz
Team A	3	9	3	0	0	4:1
Team B	3	4	1	1	1	3:2
Team C	3	4	1	1	1	1:1
Team D	3	0	0	0	3	0:4

Daraus lassen sich direkt folgende Ergebnisse ableiten:

Team A	2:1	1:0	1:0
Team B			
Team C	1:0	0:0	0:1
Team D	0:1	0:1	0:2

(Begründung: *Schubfachprinzip*. Z.B. sind dies für Team A die einzigen Möglichkeiten, wie mit 4:1 Toren drei Siege erzielt werden können.)
Damit können für Team B diese Ergebnisse abgeleitet werden:

Team B	2:0	0:0	1:2

Dies gibt die folgenden Spielpaarungen:

	Team A	Team B	Team C	Team D
Team A		2:1	1:0	1:0
Team B			0:0	2:0
Team C				1:0
Team D				

Aufgabe 2: **(8 Punkte)**
Für die Nummerierung der Seiten des Schulatlas werden 999 Ziffern verwendet.
Welche Zahl steht auf der letzten Seite?

Lösung:
Für die ersten 9 Seiten werden 9 Ziffern benötigt, auf den folgenden 90 Seiten stehen die Zahlen 10 bis 99, für die 180 Ziffern benötigt werden. Die übrigen $999 - 189 = 810$ Ziffern werden für Zahlen mit drei Ziffern benötigt. Davon gibt es also $810/3 = 270$. Die erste solche Zahl ist 100, die 270-te also 369. Das ist auch die Zahl, die auf der letzten Seite steht.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**
Eine Zahl habe 2023 Ziffern. Alle Ziffern von der zweiten zur vorletzten Ziffer sind Zweien. Die Zahl ist außerdem auch durch 72 teilbar. Finde alle möglichen Zahlen mit diesen Eigenschaften.

Lösung:
Sei a die erste und b die letzte Ziffer. Die Zahl hat also die Form $z = a2\ldots2b$. Wenn sie durch 72 teilbar ist, muss sie durch 8 und durch 9 teilbar sein.
z ist genau dann durch 9 teilbar, wenn es ihre Quersumme ist.
Also muss 9 ein Teiler von

$$a + b + 2021 \cdot 2 = a + b + 4042 = a + b + 9 \cdot 449 + 1$$

sein. Das geht nur, wenn 9 auch schon ein Teiler von $a + b + 1$ ist.
Andererseits ist eine Zahl nur dann durch 8 teilbar, wenn es die letzten drei Ziffern sind, also teilt 8 die Zahl $22b$. Damit kommt für b nur noch die Vier in Frage.
Wir wissen nun, dass 9 ein Teiler von $a + 4 + 1 = a + 5$ ist. Also ist $a = 4$ und die Zahl lautet

$$42\ldots24.$$

Aufgabe 4: **(6 Punkte)**
Ein 2023×2023 Kästchenpapier ist mit den Farben 1, 2, 3 und 4 ausgemalt (siehe Abbildung).
Welche Farbe wurde am häufigsten benutzt?

1	2	3	4	1	2	3	4	1	$\cdots$
2	3	4	1	2	3	4	1	2	$\cdots$
3	4	1	2	3	4	1	2	3	$\cdots$
4	1	2	3	4	1	2	3	4	$\cdots$
1	2	3	4	1	2	3	4	1	$\cdots$
2	3	4	1	2	3	4	1	2	$\cdots$
3	4	1	2	3	4	1	2	3	$\cdots$
4	1	2	3	4	1	2	3	4	$\cdots$
1	2	3	4	1	2	3	4	1	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$

Lösung:
In jeder Zeile wiederholen sich die Zahlen (Farben) alle vier Einträge. In den ersten $4 \cdot 504 = 2020$ Spalten kommen alle vier Zahlen gleich häufig vor. In den letzten drei Spalten fehlt jeweils eine der vier Zahlen. In der ersten Zeile kommt 4 in den letzten drei Spalten nicht vor, in der letzten Zeile kommt 2 in den letzten drei Spalten nicht vor.
Damit kommt die Farbe 3 genau einmal mehr vor wie die Farben 1, 2 und 4.

Aufgabe 5: **(4 Punkte)**
Eine Schokoladentafel bestehe aus $5 \cdot 8$ Stücken. Wie oft muss man sie brechen (ohne Schokoladenteile übereinander zu legen) um 40 Stücke zu erhalten? Welche Brechstrategie sorgt für die minimale Anzahl an Schritten?

Lösung:
Zu Beginn hat man ein einziges großes Schokoladenteil. Egal wie man bricht, die Anzahl der Schokoladenteile erhöht sich in jedem Schritt um genau eins. Da man am Ende mit 40 Stücken enden möchte, benötigt man genau $40 - 1 = 39$ Schritte.
Zum Beispiel können durch 4-mal Brechen fünf 1×8-Schokoladenteile erzeugt werden. Bei diesen kann man dann z.B. jeweils sieben Mal ein Endstück abbrechen. $4 + 5 \cdot 7 = 39$.

Aufgabe 6: **(6 Punkte)**
Seien x, y und z natürliche Zahlen deren Summe 23 ergibt. Wie groß kann das Produkt xyz maximal sein?

Lösung:
Da sowohl die Summe als auch das Produkt symmetrisch in den drei Variablen x, y und z sind, nehme ohne Einschränkung $x \geq y \geq z$.
Für $x = y = 8$ und $z = 7$ ergibt sich das Produkt $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.
Wäre eine der Zahlen 0, dann ist $xyz = 0$. Dies führt also auf keinen Fall zu einer maximalen Lösung. D.h. alle drei Zahlen sind mindestens 1.
Was passiert, wenn wir z um 1 vergrößern, dafür x um 1 verkleinern:

$$(x-1)y(z+1) = xyz + (x-z-1)y\,.$$

Da $y \geq 1$, bedeutet dies, wir könnten das Produkt durch $x \to x-1$ und $z \to z+1$ vergrössern, wenn $x - z - 1 \geq 1$, also $x - z \geq 2$ gilt. In der optimalen Wahl von x, y und z unterscheiden sich die drei Variablen also um höchstens 1.
Da 23 bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, gilt $x = y = z + 1$. In anderen Worten: die Kombination $x = z + 1$, $y = z$ ergibt niemals die Summe 23. Also erhalten wir die angegebene Lösung $x = y = 8$ und $z = 7$. Natürlich können wir die drei Zahlen x, y, z auch beliebig vertauschen.