# Klassenstufe 9–10

*Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.*
*Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.*
*Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.*

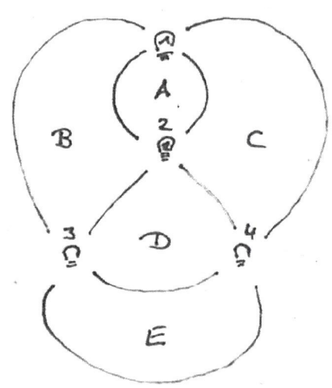
**Aufgabe 1:** **(6 Punkte)**
Man nehme eine Primzahl größer als 3, multipliziere sie mit sich selbst und ziehe 1 davon ab. Warum ist das Ergebnis immer ohne Rest durch 24 teilbar?

*Lösung:*
Für den gesuchten Ausdruck gilt:

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

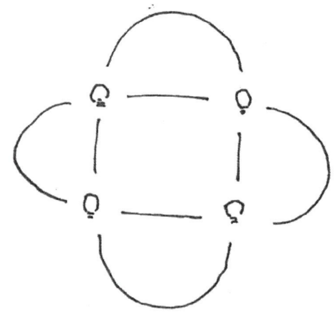
Da die Primzahl $p > 3$ ist, wissen wir, dass $p$ ungerade ist. Daher sind die Zahlen $p-1$ und $p+1$ sind aufeinander folgende gerade Zahlen. Das bedeutet, eine der beiden Zahlen ist auf alle Fälle durch 2 teilbar und die andere ist durch 4 teilbar. Insgesamt ist daher $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar.
Außerdem sind $p-1$, $p$ und $p+1$ drei aufeinander folgende Zahlen, d.h. genau eine davon ist durch 3 teilbar – und es ist nicht $p$ (hier ist die Primzahleigenschaft gefordert). Also muss $(p-1)(p+1)$ durch 3 teilbar sein.
Ist eine Zahl durch 3 und durch 8 teilbar, ist sie auch durch 24 teilbar.

**Aufgabe 2:** **(6 Punkte)**
Bei dem folgenden Spiel sind Lampen an den Positionen 1, 2, 3, 4. Durch Betätigen der Schalter $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ werden jeweils die benachbarten Lampen umgeschaltet.




a) Finde für jede Lampe $i$ ($1 \leq i \leq 3$) Schalter, so dass ausgehend von dunklen Lampen nach Betätigen dieser Schalter nur Lampe $i$ leuchtet. Z.B. $4 = A, C$.

b) Zeige, dass im unteren Bild – ausgehend von dunklen Lampen – keine einzelne Lampe zum Leuchten gebracht werden kann.



*Lösung:*

a) Notiere in folgendem Schema, welcher Schalter welche Lampe schaltet:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Wie sich das Betätigen der Schalter auf die Lampen auswirkt, sieht man an der Summe der entsprechenden Spalten des Schemas:

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Steht in einer Zeile eine grade Zahl, bedeutet dies, die entsprechende Lampe ist dunkel. Einer ungerade Zahl bedeutet, die Lampe ist hell. Also schaltet $A + C$ die Lampe 4 ein.

Nun kann man sehen:

$A + B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 3, $B + C + D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 2, $A + D + E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 1.

b) Mit geeigneten Bezeichnungen erhält man folgendes Schema:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Das Schema ist symmetrisch: Zyklische Umbenennung der Schalter $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow A$ ändert das Schema nicht. Wir können also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass Schalter $A$ betätigt wird. Nachprüfen ergibt:

i) Keine Kombination von $A$ mit einem weiteren Schalter aus $B$, $C$, $D$ ist Lösung.

ii) Keine Kombination von $A$ mit zwei weiteren Schaltern aus $B$, $C$, $D$ ist Lösung.

iii) Die Kombination von $A + B + C + D$ ist keine Lösung.

Genauso kann überprüft werden, dass keine Kombination mit $A + E$ eine Lösung ergibt.

**Aufgabe 3:** **(6 Punkte)**

Seien $x$, $y$ und $z$ natürliche Zahlen deren Summe 23 ergibt. Wie groß kann das Produkt $xyz$ maximal sein?

*Lösung:*

Da sowohl die Summe als auch das Produkt symmetrisch in den drei Variablen $x$, $y$ und $z$ sind, nehme ohne Einschränkung $x \geq y \geq z$.

Für $x = y = 8$ und $z = 7$ ergibt sich das Produkt $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

Wäre eine der Zahlen 0, dann ist $xyz = 0$. Dies führt also auf keinen Fall zu einer maximalen Lösung. D.h. alle drei Zahlen sind mindestens 1.

Was passiert, wenn wir $z$ um 1 vergrößern, dafür $x$ um 1 verkleinern:

$$(x-1)y(z+1) = xyz + (x-z-1)y\,.$$

Da $y \geq 1$, bedeutet dies, wir könnten das Produkt durch $x \to x-1$ und $z \to z+1$ vergrössern, wenn $x - z - 1 \geq 1$, also $x - z \geq 2$ gilt. In der optimalen Wahl von $x$, $y$ und $z$ unterscheiden sich die drei Variablen also um höchstens 1.

Da 23 bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, gilt $x = y = z + 1$. In anderen Worten: die Kombination $x = z + 1$, $y = z$ ergibt niemals die Summe 23. Also erhalten wir die angegebene Lösung $x = y = 8$ und $z = 7$. Natürlich können wir die drei Zahlen $x$, $y$, $z$ auch beliebig vertauschen.

**Aufgabe 4:** **(6 Punkte)**

Auf wieviele Arten und Weisen kann man 2023 Cent mit genau 777 Münzen erhalten, wenn man nur 1-, 2-, oder 5-Cent Münzen verwendet?

*Lösung:*

Wir bezeichnen mit $x$ die Anzahl der 5-Cent Münzen und mit $y$ die Anzahl der 2-Cent Münzen.

$$5x + 2y + 1 \cdot (777 - x - y) = 2023 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + y = 1246 \tag{1}$$

Aus (1) und da $y \geq 0$ folgt: $x \leq 311$.

$777 - x$ der Münzen sind keine 5-Cent Münzen. Würden wir die 1-Cent Münzen durch 2-Cent-Münzen ersetzen, so würde der Gesamtbetrag möglicherweise vergrößert werden. Es gilt also:

$$5x + 2(777 - x) \geq 2023$$

Es folgt:

$$3x \geq 2023 - 2 \cdot 777 = 469 \quad \Rightarrow \quad x \geq 157$$

Für jedes $157 \leq x \leq 311$ gibt es wegen (1) genau eine Möglichkeit, die Anzahl der 2-Cent- und 1-Cent Münzen zu wählen, nämlich $y = 1246 - 5x$.

Es gibt daher 155 Arten, die Münzen zu wählen.

**Aufgabe 5:** **(6 Punkte)**

Sei $a_1 = 49$. Für $n \geq 2$ berechne $a_n$ als das Quadrat von der Summe von 1 und der Quersumme von $a_{n-1}$. Also z.B. $a_2 = (4+9+1)^2 = 14^2 = 196$. Wie lautet $a_{2023}$?

*Lösung:*

$a_1 = 49$, $a_2 = 196$, $a_3 = 289$, $a_4 = 400$, $a_5 = 25$, $a_6 = 64$, $a_7 = 121$, $a_8 = 25$. Beginnend ab $a_5$ wiederholt sich die Folge alle 3 Schritte. Wegen $2023 = 5 + 3 \cdot 673 - 1$ gilt $a_{2023} = 121$.

**Aufgabe 6:** **(6 Punkte)**

Wie oft stehen der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 24 Stunden senkrecht zueinander, und wann geschieht dies nach Mitternacht zum ersten Mal?

*Lösung:*

In 24 Stunden vollführt der Stundenzeiger zwei, der Minutenzeiger 24 Umdrehungen auf dem Ziffernblatt. Wenn wir die Uhr so mitdrehen, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, sieht man folglich (wegen des gleichen Drehsinns) den Minutenzeiger 22 Umdrehungen machen. Während jeder dieser Umdrehungen steht er genau zweimal senkrecht zum Stundenzeiger, nämlich einmal nach rechts und einmal nach links zeigend. Insgesamt stehen die beiden Zeiger also am Tag genau 44-mal senkrecht zueinander.
Beim ersten Senkrechtstand nach Mitternacht hat sich der (schnellere) Minutenzeiger genau um 90 Grad mehr gedreht als der Stundenzeiger. Wir rechnen am einfachsten in Grad und stellen noch fest, dass sich der Minutenzeiger ($m_g$ sei sein zurückgelegter Winkel in Grad) genau 12-mal so schnell dreht wie der Stundenzeiger ($s_g$). Die Bedingung für den ersten Senkrechtstand lautet also:

$$m_g = s_g + 90 = \frac{1}{12} m_g + 90 \quad \Longleftrightarrow \quad m_g = \frac{12 \cdot 90}{11} = \frac{1080}{11}\,.$$

Somit ist der Zeitpunkt des ersten Senkrechtstandes um $\frac{1080}{11} \cdot \frac{60}{360}$ min $= \frac{180}{11}$ min $\approx 16$ min 22 sek nach Mitternacht.
Eine andere Möglichkeit, diesen Zeitpunkt zu berechnen, wäre übrigens die folgende: Drehen wir die Uhr nach wie vor so mit, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, so brauchen wir nur den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem der Minutenzeiger eine Vierteldrehung vollführt hat. Da er sich, wie oben gesehen, in 24 Stunden genau 22-mal dreht, braucht er für diese Vierteldrehung genau $\frac{1}{4} \cdot \frac{24}{22} = \frac{3}{11}$ Stunden, was wieder $\frac{180}{11}$ Minuten entspricht.