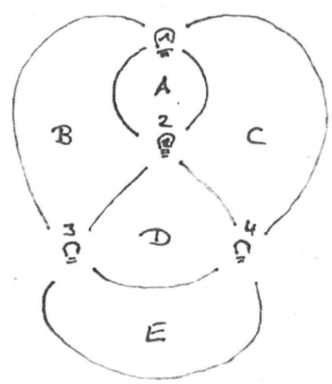
Klassenstufe 11–12

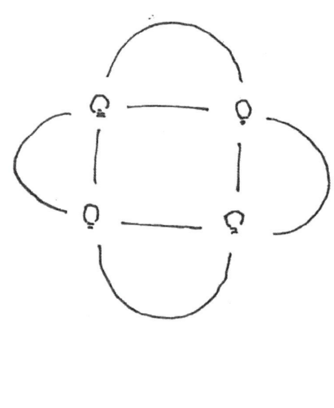
Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**
Bei dem folgenden Spiel sind Lampen an den Positionen 1, 2, 3, 4. Durch Betätigen der Schalter A, B, C, D, E werden jeweils die benachbarten Lampen umgeschaltet.



a) Finde für jede Lampe i $(1 \leq i \leq 3)$ Schalter, so dass ausgehend von dunklen Lampen nach Betätigen dieser Schalter nur Lampe i leuchtet. Z.B. $4 = A, C$.

b) Zeige, dass im unteren Bild – ausgehend von dunklen Lampen – keine einzelne Lampe zum Leuchten gebracht werden kann.



Lösung:

a) Notiere in folgendem Schema, welcher Schalter welche Lampe schaltet:

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	1	0
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	1	1

Wie sich das Betätigen der Schalter auf die Lampen auswirkt, sieht man an der Summe der entsprechenden Spalten des Schemas:

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Steht in einer Zeile eine grade Zahl, bedeutet dies, die entsprechende Lampe ist dunkel. Einer ungerade Zahl bedeutet, die Lampe ist hell. Also schaltet $A + C$ die Lampe 4 ein.

Nun kann man sehen:

$A + B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 3, $B + C + D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 2, $A + D + E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lampe 1.

b) Mit geeigneten Bezeichnungen erhält man folgendes Schema:

	A	B	C	D	E
1	1	0	0	1	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1

Das Schema ist symmetrisch: Zyklische Umbenennung der Schalter $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$ ändert das Schema nicht. Wir können also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass Schalter A betätigt wird. Nachprüfen ergibt:

i) Keine Kombination von A mit einem weiteren Schalter aus B, C, D ist Lösung.

ii) Keine Kombination von A mit zwei weiteren Schaltern aus B, C, D ist Lösung.

iii) Die Kombination von $A + B + C + D$ ist keine Lösung.

Genauso kann überprüft werden, dass keine Kombination mit $A + E$ eine Lösung ergibt.

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**

Wie oft stehen der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 24 Stunden senkrecht zueinander, und wann geschieht dies nach Mitternacht zum ersten Mal?

Lösung:

In 24 Stunden vollführt der Stundenzeiger zwei, der Minutenzeiger 24 Umdrehungen auf dem Ziffernblatt. Wenn wir die Uhr so mitdrehen, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, sieht man folglich (wegen des gleichen Drehsinns) den Minutenzeiger 22 Umdrehungen machen. Während jeder dieser Umdrehungen steht er genau zweimal senkrecht zum Stundenzeiger, nämlich einmal nach rechts und einmal nach links zeigend. Insgesamt stehen die beiden Zeiger also am Tag genau 44-mal senkrecht zueinander.

Beim ersten Senkrechtstand nach Mitternacht hat sich der (schnellere) Minutenzeiger genau um 90 Grad mehr gedreht als der Stundenzeiger. Wir rechnen am einfachsten in Grad und stellen noch fest, dass sich der Minutenzeiger (m_g sei sein zurückgelegter Winkel in Grad) genau 12-mal so schnell dreht wie der Stundenzeiger (s_g). Die Bedingung für den ersten Senkrechtstand lautet also:

$$m_g = s_g + 90 = \frac{1}{12} m_g + 90 \quad \Longleftrightarrow \quad m_g = \frac{12 \cdot 90}{11} = \frac{1080}{11}\,.$$

Somit ist der Zeitpunkt des ersten Senkrechtstandes um $\frac{1080}{11} \cdot \frac{60}{360}$ min $= \frac{180}{11}$ min ≈ 16 min 22 sek nach Mitternacht.

Eine andere Möglichkeit, diesen Zeitpunkt zu berechnen, wäre übrigens die folgende: Drehen wir die Uhr nach wie vor so mit, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, so brauchen wir nur den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem der Minutenzeiger eine Vierteldrehung vollführt hat. Da er sich, wie oben gesehen, in 24 Stunden genau 22-mal dreht, braucht er für diese Vierteldrehung genau $\frac{1}{4} \cdot \frac{24}{22} = \frac{3}{11}$ Stunden, was wieder $\frac{180}{11}$ Minuten entspricht.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Gegeben seien 12 gleich aussehende (durchnummerierte) Kugeln. Man weiss, dass genau eine davon minimal leichter oder schwerer als die anderen ist.

Man zeige, dass es mit einer Balkenwaage möglich ist, mit drei Wägungen diese Kugel herauszufinden und zudem festzustellen, ob sie schwerer oder leichter als die anderen ist.

Lösung:

Im ersten Wägevorgang legen wir die Kugeln
1,2,3,4 auf die linke und die Kugeln 5,6,7,8 auf die rechte Waagschale.

Fall 1) Gleichgewicht: (d.h. Kugel 1,...,8 sind gleich)
Im zweiten Wägevorgang legen wir die Kugeln

9,10,11 auf die linke und die Kugeln 1,2,3 auf die rechte Waagschale.

Fall i) Gleichgewicht: (d.h. Kugel 1,...,11 sind gleich) Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 12 auf die linke und die Kugel 1 auf die rechte Waagschale. Dies zeigt, ob Kugel 12 schwerer oder leichter als die anderen ist.

Fall ii) linke Seite schwerer als rechte Seite (d.h. eine der Kugel 9,10,11 ist schwerer) Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 9 auf die linke und die Kugel 10 auf die rechte Waagschale. Dies zeigt, welche der 3 Kugeln die schwerere ist.

Fall iii) linke Seite leichter als rechte Seite (d.h. eine der Kugel 9,10,11 ist leichter) Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 9 auf die linke und die Kugel 10 auf die rechte Waagschale. Dies zeigt, welche der 3 Kugeln die leichtere ist.

Fall 2) linke Seite schwerer als rechte Seite: (d.h. eine der Kugeln 1,...,4 ist schwerer oder eine der Kugeln 5,...,9 ist leichter)

Im zweiten Wägevorgang legen wir die Kugeln 1,2,5 auf die linke und die Kugeln 3,6,9 auf die rechte Waagschale.

Fall i) Gleichgewicht: (d.h. Kugeln 1,2,5,3,6,9 sind gleich) also ist die Kugel 4 schwerer oder eine der Kugeln 7 oder 8 leichter. Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 7 auf die linke und die Kugel 8 auf die rechte Waagschale. Dies gibt die Lösung.

Fall ii) linke Seite schwerer als rechte Seite (d.h. Kugel 1 oder 2 ist schwerer oder Kugel 6 ist leichter) Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 1 auf die linke und die Kugel 2 auf die rechte Waagschale. Dies gibt die Lösung.

Fall iii) linke Seite leichter als rechte Seite (d.h. Kugel 3 ist schwerer oder Kugel 5 ist leichter) Im dritten Wägevorgang legen wir die Kugel 3 auf die linke und die Kugel 9 auf die rechte Waagschale. Dies gibt die Lösung.

Fall 3) linke Seite leichter als rechte Seite (analog zu Fall 2)

Aufgabe 4: **(6 Punkte)**

a) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

b) Zeige, dass es zu einer vorgegebenen Zahl n eine Zahl m gibt, so dass die Zahlen

$$m+1, \ldots, m+n$$

keine Primzahlen sind.

Lösung:

a) Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, $2 = p_1, p_2, \ldots, p_r$, so wäre die Zahl $1 < 1 + p_1 \cdots p_r$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Widerspruch.

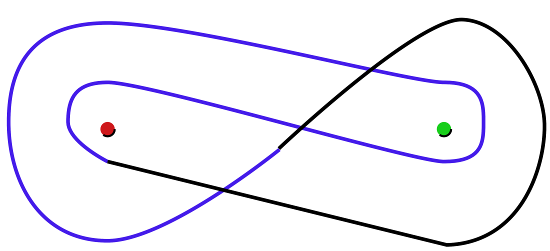
b) Setze $m = (1 \cdot 2 \cdots n) + 1$. Dann sind $m+1, \ldots, m+n$ keine Primzahlen ($m+1$ ist durch 2, $m+2$ durch 3, usw. teilbar).

Aufgabe 5: **(8 Punkte)**

Es seien 2 Nägel in der Wand an den Stellen A und B eingeschlagen. Wie kann man an einer Schnur, die um die beiden Nägel gewickelt ist und deren Enden miteinander verknotet sind, ein Bild aufhängen, so dass, nachdem man einen der beiden Nägel entfernt hat, das Bild zu Boden fällt?

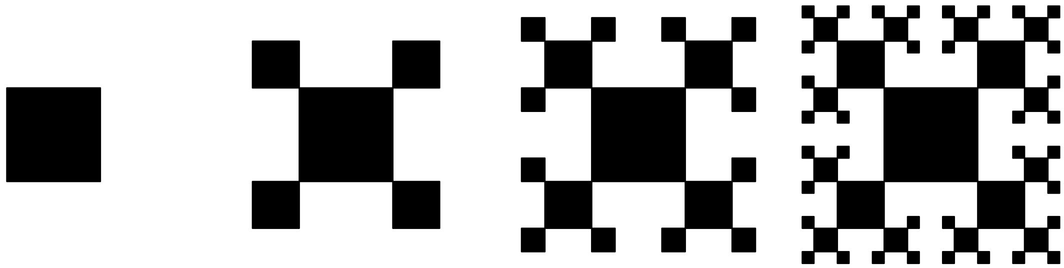
Lösung:

Pochhammer Doppelschleife: Eine Pochhammer Doppelschleife windet sich im Uhrzeigersinn um A, dann im Uhrzeigersinn um B, dann entgegen des Uhrzeigersinns um A und schließlich entgegen des Uhrzeigersinns um B.



Aufgabe 6: (8 Punkte)

Betrachte folgende Konstruktion: Starte mit einem Quadrat mit Seitenlänge 1. Eine Ecke eines Quadrats, welches keine Ecke eines anderen Quadrats berührt, heißt *frei*. In jedem weiteren Konstruktionsschritt wird an die freien Ecken diagonal ein weiteres Quadrat der halben Seitenlänge angefügt. Die entstehenden Muster der ersten vier Konstruktionsschritte sehen wie folgt aus:



(a) Welchen Flächeninhalt besitzt das n-te Muster?

(b) Welches Verhalten zeigt die Folge der Flächeninhalte für $n \to \infty$?

(c) Welchen Umfang besitzt das n-te Muster?

(d) Welches Verhalten zeigt die Folge der Umfänge für $n \to \infty$?

(e) Welche Seitenlänge besitzt das kleinste Quadrat, welches das n-te Muster einschließt? Wie lautet der Grenzwert?

(f) Aus wie vielen Quadraten besteht das n-te Muster?

Folgende Formel für $x > 0$, $x \neq 1$ könnte nützlich sein:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Lösung: