# Klassenstufe 7–8

*Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.*
*Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.*

**Aufgabe 1:** **(6 Punkte)**

Die Kinder der 7c verkaufen auf dem Schulhof selbstgemachte Limonade. Aus einem großen Behälter können sie Limonade in zwei Messbecher mit 200 und 300 ml Inhalt füllen.
Svenja möchte gerne 100 ml Limonade in ihr Glas. Also füllt Anton den großen Becher und dann aus diesem den kleinen Becher, denn dadurch bleiben im großen Becher 100 ml Limonade übrig, die er in Svenjas Glas gießt. Den vollen kleinen Becher entleert er wieder in den großen Behälter.
Die Mathelehrerin sieht es und überlegt sich zwei Aufgaben dazu:

a) Wie muss man vorgehen, um ein Glas mit 100 ml Limonade zu füllen, wenn nur zwei Becher mit 500 ml und 700 ml zur Verfügung stehen?

b) Geht es auch mit einem 400 ml und einem 600 ml Becher?

*Lösung:*

a) Ja, es geht:

- Fülle den großen (700 ml) Becher und aus diesem den kleinen (500 ml) Becher. Es bleiben 200 ml im großen Becher.
- Entleere den kleinen Becher und schütte den Inhalt des großen Becher in den kleinen: nun sind 200 ml im kleinen Becher
- Wiederhole den Vorgang: Fülle den großen Becher und aus diesem den kleinen Becher. Es bleiben 400 ml im großen Becher.
- Entleere den kleinen Becher und schütte den Inhalt des großen Becher in den kleinen: nun sind 400 ml im kleinen Becher
- Wiederhole den Vorgang nochmals: Fülle den großen Becher und aus diesem den kleinen Becher. Es bleiben 600 ml im großen Becher.
- Entleere den kleinen Becher und schütte den Inhalt des großen Becher in den kleinen: es bleiben 100 ml im großen Becher.

b) Nein, es geht nicht: egal wie umgeschüttet wird, es sind in beiden Bechern jeweils ganze Vielfache von 200 ml.

**Aufgabe 2:** **(6 Punkte)**
Zum Fussballtraining sind acht Kinder gekommen, deren Trikots die Rückennummern 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 und 10 tragen. Sie vereinbaren in 4er-Teams gegeneinander zu spielen, so dass die Summen der Nummern beider Teams gleich ist. Wie viele verschiedene Paarungen gibt es?

*Lösung:*
Die Summe der Rückennummern ist 44. Die Summe der Rückennummern für jedes Team beträgt daher 22.
Wir suchen nun durch Fallunterscheidung, welche Teams möglich sind, in denen die 10 mitspielt und deren Rückennummern sich zu 22 aufsummieren. Jedes solches Team gibt zusammen mit dem Team, das aus den jeweils anderen Spielern besteht, eine Paarung. Es ergeben sich damit diese Paarungen:

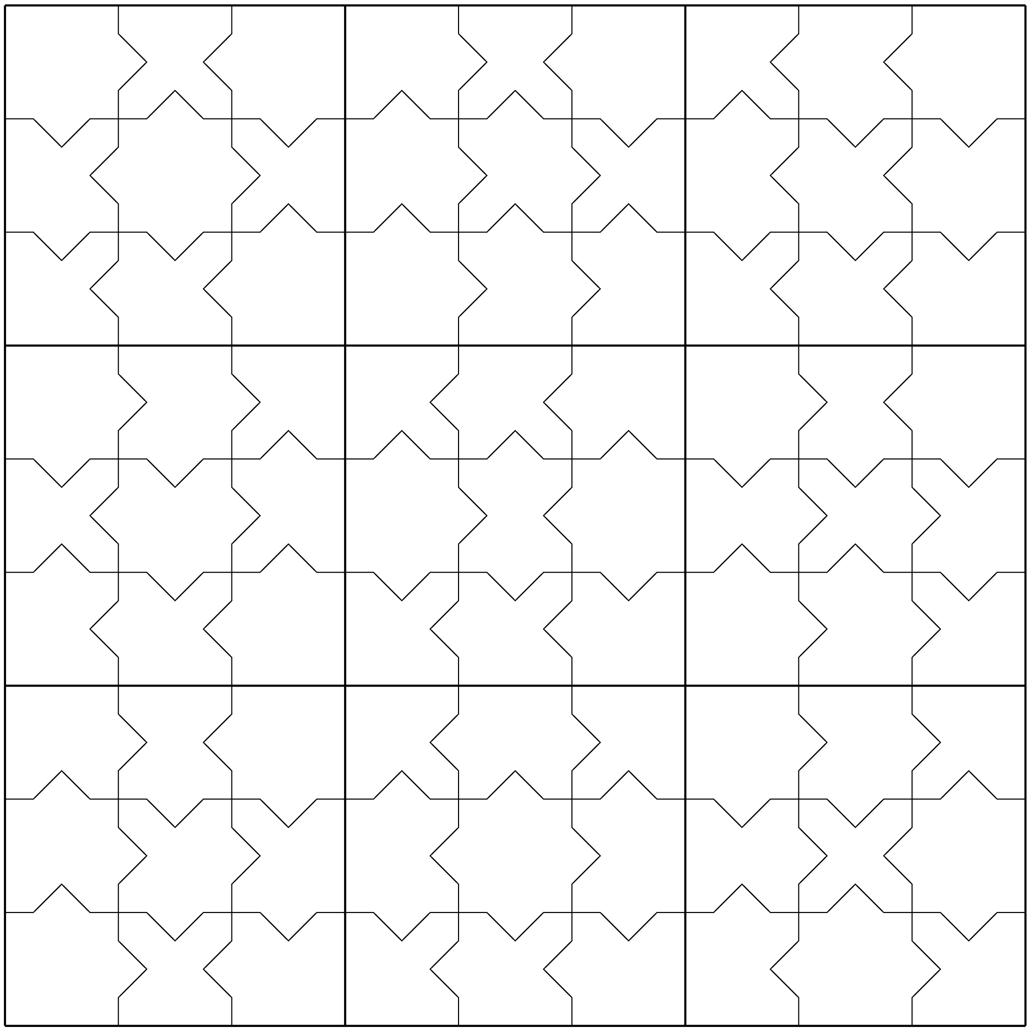
- $1 + 2 + 9 + 10 = 22$ und $3 + 5 + 6 + 8 = 22$
- $1 + 3 + 8 + 10 = 22$ und $2 + 5 + 6 + 9 = 22$
- $1 + 5 + 6 + 10 = 22$ und $2 + 3 + 8 + 9 = 22$

Das bedeutet, es gibt drei verschiedene Paarungen.

**Aufgabe 3:** **(6 Punkte)**
Beim **Vergleichs-Sudoku** gelten dieselben Regeln wie beim normalen Sudoku:

- in jedes Feld wird eine Zahl zwischen 1 und 9 eingetragen,
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in jeder Zeile genau ein Mal vor,
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in jeder Spalte genau ein Mal vor, und
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in den kleinen $3 \times 3$-Quadraten genau ein Mal vor.

Im folgenden Sudoku sind keinerlei Zahlen vorgegeben, dafür sind zwischen manchen Feldern Kleiner- bzw. Größerzeichen graphisch symbolisiert. Frei nach der Eselsbrücke „Das Krokodil schnappt immer nach dem größeren Brocken“ liefert uns dies Informationen darüber, wo die größeren und wo die kleineren Ziffern stehen. Die Zahl in der linken oberen Ecke muß also größer sein, als die Zahl direkt rechts davon.
Zu lösen ist nun folgendes Beispiel:



*Lösung:*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 4 | 3 | 7 | 9 |
| 4 | 9 | 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 6 | 8 |
| 3 | 6 | 7 | 9 | 8 | 5 | 1 | 2 | 4 |
| 9 | 8 | 4 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 7 |
| 1 | 7 | 5 | 8 | 6 | 9 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 6 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 1 |
| 6 | 5 | 9 | 2 | 7 | 1 | 8 | 4 | 3 |
| 7 | 4 | 3 | 5 | 9 | 8 | 2 | 1 | 6 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 5 |

**Aufgabe 4:** **(6 Punkte)**

Wir wollen Freundschaftsbänder herstellen. Diese sollen aus jeweils 5 Stückchen Schnur bestehen, die aneinandergeknotet werden. (Die Knoten machen wir so klein, dass wir sie nicht mehr sehen. Die Schnüre sind alle gleich lang und haben die gleiche Struktur. Sie unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Die Richtung, in der wir die Schnüre einknoten, ist nicht erkennbar.) Wie viele mögliche, verschiedene Armbänder gibt es, wenn

a) wir fünf verschiedene Farben zur Auswahl haben und jede an jedem Armband vorkommen soll?

b) wir sieben verschiedene Farben zur Auswahl haben und keine an einem Armband doppelt vorkommen soll?

c) wir nur die Farben weiß, schwarz und grün zur Verfügung haben und an jedem Armband zwei von einer, zwei von einer anderen und eine von der verbliebenen Farbe vorkommen soll?

*Lösung:*

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1/(2 \cdot 5) = 12$

b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3/(2 \cdot 5) = 252$

c) $3 \cdot (1 + 1 + 2) = 12$

**Aufgabe 5:** **(6 Punkte)**

Der Bauer Francesco aus Apulien soll Melonen an den Obsthändler Francesco in Bari liefern. Daher belädt er seinen LKW mit genau 1 Tonne Melonen, die ja bekanntermaßen zu 99% aus Wasser bestehen. Die lange Fahrt durch das heiße Apulien lässt einen Teil des Wassers verdunsten, so dass sie bei der Ankunft in Bari nur noch zu 98% aus Wasser bestehen.

Wie viel wiegt die Ladung des LKW nun noch?

*Lösung:*

Die Melonen wiegen insgesamt 1000 kg. 99% davon sind Wasser. Das Wasser wiegt also 990 kg, der Rest wiegt demnach 10 kg.

Wenn die Melonen nur noch zu 98% aus Wasser bestehen, macht der Rest 2% aus. Er wiegt aber immer noch 10 kg (nicht 20 kg, weil nicht einfach aus dem Nichts Fruchtfleisch entsteht).

Es ist also das Gewicht finden, von dem 10 kg 2% sind. Das sind 500 kg, also die Hälfte des Ausgangsgewichts.

Die Ladung des LKW wiegt nur noch 500 kg.

**Aufgabe 6:** **(6 Punkte)**

Wir haben 36 Zaunstücke, die jeweils 1 m lang und gerade sind und nur gerade (also mit 180°) oder rechtwinklig (also mit 90° oder 270°) aneinandergebaut werden können. Begründet eure Antworten auf die folgenden Fragen entweder durch eine Rechnung oder durch schlüssige Überlegungen zum Aufbauprozess. Vergesst dabei keine Fälle.

a) Mit welcher Form kann auf einer genügend großen, leeren Wiese die größtmögliche Fläche eingeschlossen werden?

b) Mit welcher Form kann auf einer genügend großen, leeren Wiese die größtmögliche Fläche eingeschlossen werden, wenn diese Wiese an eine genügend lange, gerade Mauer grenzt, die mit in die Umzäunung eingebaut werden darf? Der Zaun kann dabei auch nur rechtwinklig an die Mauer gebaut werden.

*Lösung:*

Quadrat in a) und „halbes“ Quadrat in b). Es sind nur konvexe Formen sinnvoll, also nicht „innen eingebuchtete“ Formen, denn jede andere Form würde durch „nach außen Drücken“ größer werden.

a) Wenn wir mit vier Teilen beginnen, erhalten wir eine Fläche von 1. Mit je zwei Teilen können wir das Rechteck in eine Richtung größer machen. Wenn es ein echtes Rechteck ist, ist es sinnvoller, dies auf der kürzeren Seite zu tun, um mehr Fläche zu gewinnen. Also landen wir immer bei einem Quadrat oder einem Rechteck, bei dem sich die Seitenlängen um 1 unterscheiden.

   Die optimale Form ist daher ein Quadrat mit Seitenlänge 9 und Flächeninhalt $81\,\text{m}^2$.

b) Wir machen die gleiche Überlegung wie in a), nur dass wir auf der Seite parallel zur Mauer immer zwei Teile einbauen können, es also sinnvoll ist, auf der Seite rechtwinklig zur Mauer die zwei Teile (eines rechts, eines links) einzubauen, wenn diese weniger als halb so lange wie die parallele ist.

   Die optimale Form ist daher ein Rechteck mit Seitenlängen 6 und 18 und Flächeninhalt $162\,\mathrm{m}^2$.