Klassenstufe 9–10

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**

Der Bauer Francesco aus Apulien soll Melonen an den Obsthändler Francesco in Bari liefern. Daher belädt er seinen LKW mit genau 1 Tonne Melonen, die ja bekanntermaßen zu 99% aus Wasser bestehen. Die lange Fahrt durch das heiße Apulien lässt einen Teil des Wassers verdunsten, so dass sie bei der Ankunft in Bari nur noch zu 98% aus Wasser bestehen.

Wie viel wiegt die Ladung des LKW nun noch?

Lösung:

Die Melonen wiegen insgesamt 1000 kg. 99% davon sind Wasser. Das Wasser wiegt also 990 kg, der Rest wiegt demnach 10 kg.

Wenn die Melonen nur noch zu 98% aus Wasser bestehen, macht der Rest 2% aus. Er wiegt aber immer noch 10 kg (nicht 20 kg, weil nicht einfach aus dem Nichts Fruchtfleisch entsteht).

Es ist also das Gewicht finden, von dem 10 kg 2% sind. Das sind 500 kg, also die Hälfte des Ausgangsgewichts.

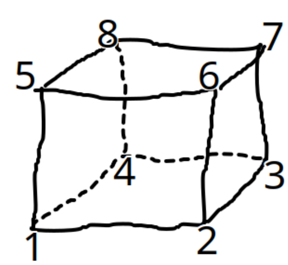
Die Ladung des LKW wiegt nur noch 500 kg.

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**

Betrachte eine Teilmenge S der Ecken eines Würfels, so dass alle drei Winkel eines Dreiecks mit beliebigen Eckpunkten aus S echt kleiner als 90° sind. Wie groß kann S maximal sein?
Gebt ein möglichst großes Beispiel an.

Lösung:

Aus jeder der sechs Seitenflächen können maximal 2 Punkte gewählt werden. Da jeder Eckpunkt in drei Seitenflächen enthalten ist gilt $|S| \leq 2 \cdot 6/3 = 4$. Ein Beispiel ist $\{1, 3, 6, 8\}$ im Würfel:

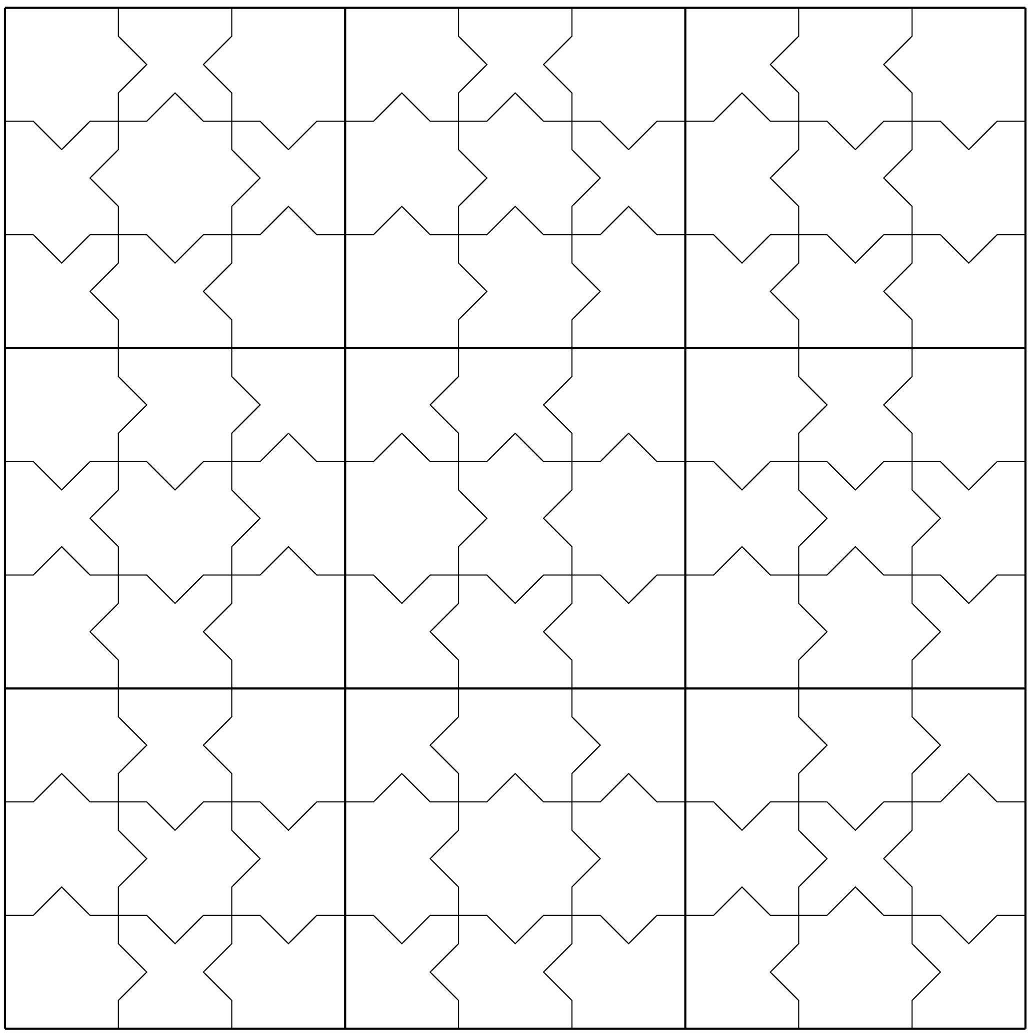


Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Beim **Vergleichs-Sudoku** gelten dieselben Regeln wie beim normalen Sudoku:

- in jedes Feld wird eine Zahl zwischen 1 und 9 eingetragen,
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in jeder Zeile genau ein Mal vor,
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in jeder Spalte genau ein Mal vor, und
- jede Zahl zwischen 1 und 9 kommt in den kleinen 3×3-Quadraten genau ein Mal vor.

Im folgenden Sudoku sind keinerlei Zahlen vorgegeben, dafür sind zwischen manchen Feldern Kleiner- bzw. Größerzeichen graphisch symbolisiert. Frei nach der Eselsbrücke „Das Krokodil schnappt immer nach dem größeren Brocken“ liefert uns dies Informationen darüber, wo die größeren und wo die kleineren Ziffern stehen. Die Zahl in der linken oberen Ecke muß also größer sein, als die Zahl direkt rechts davon.
Zu lösen ist nun folgendes Beispiel:



Lösung:

5	2	8	6	1	4	3	7	9
4	9	1	7	3	2	5	6	8
3	6	7	9	8	5	1	2	4
9	8	4	1	2	3	6	5	7
1	7	5	8	6	9	4	3	2
2	3	6	4	5	7	9	8	1
6	5	9	2	7	1	8	4	3
7	4	3	5	9	8	2	1	6
8	1	2	3	4	6	7	9	5

Aufgabe 4: **(6 Punkte)**
Eine positive Zahl sei durch 3, 4 und 5 teilbar. Das soll auch für ihre Quersumme gelten. Welche ist die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften?

Lösung:
Sei $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 \ldots$ mit $0 \leq a_i \leq 9$ die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften. Die Zahl ist durch 20 teilbar. Also gilt $a_0 = 0$ und a_1 ist gerade.
Die Quersumme ist ein Vielfaches von 60. Da eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn dies für ihre Quersumme gilt, ist $n = 79999980$.

Aufgabe 5: **(6 Punkte)**
Eine Schokoladentafel bestehe aus 2×6 Stücken. Wie oft muss man sie brechen, wenn man auch Schokoladenteile übereinander legen darf, um 12 Stücke zu erhalten? Welche Brechstrategie sorgt für die minimale Anzahl an Schritten?

Lösung:
Es sind minimal 4 Schritte nötig: 3 Schritte sind nicht genug, da mit jedem Brechen die Anzahl der Stücke höchstens verdoppelt wird, also maximal nur $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Stücke erzeugt werden können.

4-mal Brechen ist ausreichend, z.B.:

- Brechen in zwei 1×6 Stücke
- Übereinanderlegen der beiden Stücke und Brechen in vier 1×3 Stücke
- Übereinanderlegen und Brechen in vier 1×2 und vier 1×1 Stücke
- Brechen der vier 1×2 Stücke in acht 1×1 Stücke.

Aufgabe 6: **(6 Punkte)**

Gegeben seien n, $n \geq 3$, verschiedene Punkte, durch die ein Kreis gelegt werden kann. Je 2 dieser n Punkte seien durch eine Linie verbunden. (Ist $n = 3$, so erhalten wir ein Dreieck, $n = 4$: ⊠) Für welche n lassen sich die Figuren sich in einem Zug (Start bei einem Punkt, ohne abzusetzen) zeichnen, ohne eine Linie zweimal zu ziehen, und für welche n nicht?

Lösung:

Es funktioniert, falls die Anzahl n der Punkte ungerade ist, andernfalls nicht.

Begründung:

1. Ist n gerade, gibt es keinen derartigen Linienzug. Denn jeder Punkt ist mit genau $n-1$ Punkten durch eine Linie verbunden. Ist n gerade, so ist jeder Punkt mit einer ungeraden Anzahl von Punkten verbunden. Jedesmal, wenn wir auf unserem Pfad durch einen Punkt kommen, der weder Anfangs- noch Endpunkt unseres Pfades ist, überfahren wir zwei Linien (eine zum Punkt hin und eine vom Punkt weg). Da die Anzahl der Linien, die zu dem Punkt führen, ungerade ist, muss also bei jedem möglichen Zeichen-Pfad immer mindestens eine Linie in dem Punkt übrig bleiben.

2. Ist n ungerade, so gibt es immer mindestens einen Pfad. Dazu wählen wir einen beliebigen Startpunkt P_1 und nummerieren die Punkte dann im Uhrzeigersinn $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Ein möglicher Pfad für $n = 5 = 2 \cdot 2 + 1$ sähe so aus:

$$P_5 \to P_1 \to P_4 \to P_2 \to P_3 \to P_5$$

dann weiter

$$P_5 \to P_2 \to P_1 \to P_3 \to P_4 \to P_5$$

Allgemein: Wir schreiben die ungerade Zahl $n > 1$ als $2m + 1$, wobei m eine natürliche Zahl ist. Ein möglicher Pfad wären folgende m Schritte, die jeweils in P_{2m+1} beginnen und enden:

$$\begin{array}{llllllllll}
P_{2m+1} \to P_1 & \to P_{2m} & \to P_2 & \to P_{2m-1} & \to P_3 & \to \ldots \to P_m & \to P_{m+1} & \to P_{2m+1} \\
P_{2m+1} \to P_2 & \to P_1 & \to P_3 & \to P_{2m} & \to P_4 & \to \ldots \to P_{m+1} & \to P_{m+2} & \to P_{2m+1} \\
P_{2m+1} \to P_3 & \to P_2 & \to P_4 & \to P_1 & \to P_5 & \to \ldots \to P_{m+2} & \to P_{m+3} & \to P_{2m+1} \\
 & & \vdots & & & & & \\
P_{2m+1} \to P_m & \to P_{m-1} & \to P_{m+1} & \to P_{m-2} & \to P_{m+2} & \to \ldots \to P_{2m-1} & \to P_{2m} & \to P_{2m+1}
\end{array}$$

Jeder der m Schritte durchläuft alle Punkte genau einmal, d.h. es werden zwei Linien jedes Punktes durchlaufen. In m Schritten werden daher alle $2 \cdot m = n - 1$ Linien jedes Punktes durchlaufen. Durch den gewählten Ablauf wird keine Linie zweimal durchlaufen.