Klassenstufe 11–12

*Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.
Nutzung von Smartphone oder Taschenrechner ist nicht erlaubt.*

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die Zahl 2024 lässt sich als Summe von vier ganzen positiven Zahlen $0 < a, b, c, d$ darstellen, z.B. $2024 = 1 + 2 + 3 + 2018$. Wenn wir zwei Summanden vertauschen, so betrachten wir dies als dieselbe Darstellung.

Es sei nun M_{ug} die Menge der Darstellungen von 2024 mit $0 < a, b, c, d$ alle ungerade und M_g die Menge der Darstellungen von 2024 mit $0 < a, b, c, d$ alle gerade.

Welche Menge enthält mehr Elemente?

Lösung:

M_{ug} enthält mehr Elemente:

Sei $a + b + c + d$ eine Darstellung von 2024 mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gerade, so ist $(a - 1) + (b - 1) + (c + 1) + (d + 1)$ eine Darstellung von 2024 mit $0 < a, b, c, d$ ungerade. Somit gibt es mindestens genauso viele Elemente in M_{ug} wie in M_g , aber die Darstellung $2024 = 1 + 1 + 1 + 2021$ wird bei dieser Abbildung nicht getroffen. Also enthält M_{ug} mehr Elemente.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Eine positive Zahl sei durch 3, 4 und 5 teilbar. Das soll auch für ihre Quersumme gelten. Welche ist die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften?

Lösung:

Sei $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 \dots$ mit $0 \leq a_i \leq 9$ die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften. Die Zahl ist durch 20 teilbar. Also gilt $a_0 = 0$ und a_1 ist gerade.

Die Quersumme ist ein Vielfaches von 60. Da eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn dies für ihre Quersumme gilt, ist $n = 79999980$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben seien n , $n \geq 3$, verschiedene Punkte, durch die ein Kreis gelegt werden kann. Je 2 dieser n Punkte seien durch eine Linie verbunden. (Für $n = 3$ erhalten wir ein Dreieck, für $n = 4$ die Figur $\square$)

Für welche n lassen sich die Figuren sich in einem Zug (Start bei einem Punkt, ohne abzusetzen) zeichnen, ohne eine Linie zweimal zu ziehen, und für welche n nicht?

Lösung:

Alter 1	Alter 2	Alter 3	Summe
2450	1	1	2452
1225	2	1	1228
490	5	1	496
350	7	1	358
245	10	1	256
245	5	2	252
175	14	1	190
175	7	7	189
98	25	1	124
98	5	5	108
70	35	1	106
70	7	5	82
50	49	1	100
50	7	7	64
49	25	2	76
49	10	5	64
35	35	2	72
35	14	5	54
35	10	7	52
25	14	7	46

Da der Smutje noch keine Lösung findet, wenn er die Summe kennt, kommen nur die beiden Möglichkeiten 50, 7, 7 und 49, 10, 5 mit der Summe 64 in Frage.

Wie alt ist der Kapitän? Wenn er 49 Jahre alt oder jünger wäre, dann könnte es nicht sein, dass die Passagiere alle jünger sind als der Kapitän. Wenn er 51 oder älter wäre, dann könnte der Smutje keine Entscheidung treffen, denn bei beiden Möglichkeiten wären alle jünger als der Kapitän. Also ist der Kapitän 50 Jahre alt, und die drei Passagiere sind 49, 10 und 5 Jahre alt.

Aufgabe 5:

(6 Punkte)

Anna und Berta werfen eine Münze und schreiben auf, in welcher Reihenfolge Kopf (K) oder Zahl (Z) oben liegen. Anna hat die Dreierfolge KKZ ausgewählt und Berta die Folge ZKK. Sie werfen die Münze solange, bis eine der beiden Dreierfolgen erscheint. Es gewinnt natürlich diejenige, deren Folge erschienen ist.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt?
- b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn Berta als Folge KZK statt ZKK wählt?

Lösung:

- a) Wenn Anna die Dreierfolge KKZ und Berta die Dreierfolge ZKK hat, gewinnt Anna mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$.

Begründung: wenn am Anfang zwei K hintereinander geworfen werden (Wahrscheinlichkeit $1/4$), gewinnt Anna, nämlich sobald das erste Z fällt (KK...Z).

Fängt die Folge aber anders an, ist schon ein Z dabei. Werden nun zum ersten Mal zwei K hintereinander geworfen (was für einen Gewinn von Anna notwendig wäre), ist vorher schon ein Z geworfen worden, daher gewinnt in diesem Fall Berta.

b) Sei x die Wahrscheinlichkeit, mit der Anna gewinnt. Man betrachtet im Prinzip die 8 möglichen Fälle für die ersten 3 Münzwürfe: Jeder dieser 8 Fälle tritt mit Wahrscheinlichkeit $1/8$ auf.

- KKZ oder KKK: Wie in a) gewinnt hier Anna mit Wahrscheinlichkeit $1/4$.
- KZK: Hier gewinnt natürlich Berta.
- KZZ: Hier kann keine der beiden einen Rest dieser Kombination nutzen (da beide Gewinnkombinationen mit K anfangen) und daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von Anna dieselbe wie am Anfang.
- Dasselbe gilt auch, wenn gleich am Anfang ein Z (Fälle 5 bis 8) geworfen wird (mit Wahrscheinlichkeit $1/2$).

Daher gilt:

$$x = 1/4 + 0 + 1/8 \cdot x + 1/2 \cdot x, \quad \text{also} \quad x = 2/3$$